FAMILLES SOMMABLES DANS UN ESPACE VECTORIEL NORME

APPLICATIONS AUX SERIES DANS UN ESPACE VECTORIEL NORME

-

Patrick Vollat
2009

Préambule

Le contexte naturel pour parler de familles sommables est celui induit par la structure de *groupe topologique*. Il suffit en effet d'une addition (la loi de composition interne du groupe) et d'une topologie pour "additionner des objets en quantité quelconque, éventuellement infinie". Dans la très grande majorité des situations concrètes, les objets considérés sont des éléments d'un espace vectoriel. De plus, la notion de groupe topologique n'est que très rarement abordée dans les programmes de licence. On se limitera ainsi dans le présent exposé, à l'étude des familles sommables dans les espaces vectoriels normés réels ou complexes - de dimension quelconque et pas forcément complets néanmoins.

Contenu

***

1 Définitions et propriétés de base

Les espaces vectoriels normés considérés sont tous construits sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
I étant un ensemble quelconque, $\mathcal{P}_f(I)$ désigne l'ensemble des parties finies de I.
Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille d'un espace vectoriel E, pour toute partie finie J de I, on note A_J la somme $\sum_{i\in J} a_i$.

Définition 1 Sommabilité
Une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'un espace vectoriel normé E est *sommable* si et seulement si :

$$\exists A \in E \;/\; \forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists I_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(I) \;/\; \forall J \in \mathcal{P}_f(I) \quad I_\varepsilon \subset J \Longrightarrow ||A - A_J|| \leq \varepsilon \quad .$$

On montre facilement que A est unique ; on appelle A la *somme* de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Définition 2 Critère de Cauchy
Une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'un espace vectoriel normé E vérifie le *critère de Cauchy*
si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists I_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(I) \;/\; \forall J \in \mathcal{P}_f(I) \quad I_\varepsilon \cap J = \varnothing \Longrightarrow ||A_J|| \leq \varepsilon \quad .$$

Théorème 1 *Une famille sommable d'un espace vectoriel normé vérifie le critère de Cauchy.*

Preuve : Soit une famille sommable $(a_i)_{i\in I}$:
$\exists A \in E \;/\; \forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists I_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(I) \;/\; \forall J \in \mathcal{P}_f(I) \quad I_\varepsilon \subset J \Longrightarrow ||A - A_J|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
$\forall J \in \mathcal{P}_f(I) \;/\; I_\varepsilon \cap J = \varnothing$ on a $I_\varepsilon \subset I_\varepsilon \cup J$ donc $||A - A_{I_\varepsilon \cup J}|| = ||A - A_{I\varepsilon} - A_J|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
D'où : $||A_J|| \leq ||A - A_{I_\varepsilon}|| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Théorème 2 *Dans un Banach, une famille vérifiant le critère de Cauchy est sommable.*

Preuve : Soit une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'un Banach E vérifiant le critère de Cauchy :
$\forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists I_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(I) \;/\; \forall J \in \mathcal{P}_f(I) \quad I_\varepsilon \cap J = \varnothing \Longrightarrow ||A_J|| \leq \varepsilon$.
On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^* \;,\; \exists I_n \in \mathcal{P}_f(I) \;/\; \forall J \in \mathcal{P}_f(I) \quad I_n \cap J = \varnothing \Longrightarrow ||A_J|| \leq \frac{1}{n}$.
On pose pour tout entier n non nul : $B_n = \{A_J \;/\; J \in \mathcal{P}_f(I) \text{ et } I_n \subset J\}$.
On a alors : $\delta(B_n) \leq \frac{2}{n}$, $\delta(B_n)$ désignant le diamètre de B_n.
En effet : $\forall (J, J') \in \mathcal{P}_f(I)^2$, $(I_n \subset J \text{ et } I_n \subset J') \Longrightarrow (J \backslash J') \cap I_n = (J' \backslash J) \cap I_n = \varnothing$;
ainsi : $||A_J - A_{J'}|| = ||A_{J\backslash J'} - A_{J'\backslash J}|| \leq ||A_{J\backslash J'}|| + ||A_{J'\backslash J}|| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$.
On pose ensuite pour tout entier n non nul :
$I'_n = \cup_{1\leq k\leq n} I_k$ et $B'_n = \{A_J \;/\; J \in \mathcal{P}_f(I) \text{ et } I'_n \subset J\}$.
On a $I_n \subset I'_n$ et $B'_n \subset B_n$ donc $\delta(B'_n) \leq \frac{2}{n}$ et enfin $\delta(\overline{B'_n}) = \delta(B'_n) \leq \frac{2}{n}$
($\overline{B'_n}$ étant l'adhérence de B'_n).
On a également $I'_n \subset I'_{n+1}$ et $B'_{n+1} \subset B'_n$ donc : $\overline{B'_{n+1}} \subset \overline{B'_n}$.
$(\overline{B'_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors une suite décroissante de fermés non vide dont le diamètre tend vers 0.
Comme E est complet, on conclut à l'existence d'un élément A de E tel que $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{B'_n} = \{A\}$.
On peut alors écrire :
$\forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; (n_\varepsilon = E(\frac{4}{\varepsilon}) + 1 > \frac{4}{\varepsilon}) \;,\; \exists J_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(I) \; (J_\varepsilon = I'_{n_\varepsilon} \text{ et donc } A_{J_\varepsilon} \in B'_{n_\varepsilon}) \;/$
$\forall J \in \mathcal{P}_f(I)$,
$J_\varepsilon \subset J \Longrightarrow ||A - A_J|| \leq ||A - A_{J_\varepsilon}|| + ||A_{J_\varepsilon} - A_J|| \leq \delta(\overline{B'_{n_\varepsilon}}) + \delta(B'_{n_\varepsilon}) \leq \frac{2}{n_\varepsilon} + \frac{2}{n_\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
et la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable.

Corollaire 1 ***fondamental*** *Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille d'un espace vectoriel normé E qui vérifie le critère de Cauchy - une famille sommable par exemple, alors :*
1. $\forall \varepsilon > 0$, $\{i \in I \;/\; ||a_i|| \geq \varepsilon\}$ *est fini,*
2. $\{i \in I \;/\; a_i \neq 0\}$ *est dénombrable.*

Preuve : $(a_i)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy ce qui donne facilement :
$\forall\varepsilon > 0\ ,\ \exists I_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(I)\ /\ \forall i \in I\ ,\ i \notin I_\varepsilon \implies I_\varepsilon \cap \{i\} = \varnothing$ et donc $||A_{\{i\}}|| = ||a_i|| < \varepsilon$
ou encore en contraposant : $\forall i \in I\ ,\ ||a_i|| \geq \varepsilon \Longrightarrow i \in I_\varepsilon$ d'où la première partie du résultat.
Pour la deuxième partie, on remarque que $\{i \in I\ /\ \ a_i \neq 0\} = \cup_{n\in\mathbb{N}^*}\{i \in I\ /\ ||a_i|| \geq \frac{1}{n}\}$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis.

On a alors les quelques propriétés basiques suivantes :
Propriété 1 : $\mathcal{S}(I, E)$, ensemble des familles sommables d'un espace vectoriel normé E indexées par un même ensemble d'indices I, est bien évidemment un espace vectoriel et l'application $(a_i)_{i\in I} \longmapsto \sum_{i\in I} a_i$ est une forme linéaire définie sur $\mathcal{S}(I, E)$.
Propriété 2 : Toute sous-famille (terminologie évidente) d'une famille sommable d'un Banach est sommable.
Propriété 3 : Dans tout espace vectoriel normé, l'ensemble des sommes sur les parties finies d'une famille vérifiant le critère de Cauchy est borné. Cest donc le cas pour une famille sommable.
Preuves : La preuve de la première propriété est triviale.
Propriéré 2 : Elle se démontre facilement en utilisant le critère de Cauchy.
Soit une famille sommable $(a_i)_{i\in I}$ d'un Banach E ; elle vérifie le critère de Cauchy :
$\forall\varepsilon > 0\ ,\ \exists I_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(I)\ /\ \forall J \in \mathcal{P}_f(I) \quad I_\varepsilon \cap J = \varnothing \Longrightarrow ||A_J|| \leq \varepsilon$.
Soit $L \subset I$ et la sous-famille associée $(a_i)_{i\in L}$ .On pose $L_\varepsilon = L \cap I_\varepsilon$; on a alors :
$\forall J \in \mathcal{P}_f(L) \quad L_\varepsilon \cap J = I_\varepsilon \cap J$ donc :
$\forall\varepsilon > 0\ ,\ \exists L_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(L)\ /\ \forall J \in \mathcal{P}_f(L) \quad L_\varepsilon \cap J = \varnothing \Longrightarrow ||A_J|| \leq \varepsilon$.
ainsi $(a_i)_{i\in L}$ vérifie le critère de Cauchy et est sommable puisque E est complet.
Propriété 3 : Soit une famille $(a_i)_{i\in I}$ vérifiant le critère de Cauchy :
$\forall\varepsilon > 0\ ,\ \exists I_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(I)\ /\ \forall J \in \mathcal{P}_f(I) \quad I_\varepsilon \cap J = \varnothing \Longrightarrow ||A_J|| \leq \varepsilon$.
On a alors : $\forall J \in \mathcal{P}_f(I)\ ,\ \ ||A_J|| \ = \ ||A_{J\cap I_\varepsilon} + A_{J\setminus I_\varepsilon}|| \ \leq ||A_{J\cap I_\varepsilon}|| \ + ||A_{J\setminus I_\varepsilon}||$
$\leq ||\sum_{i\in J\cap I_\varepsilon} a_i|| + \varepsilon \leq \sum_{i\in J\cap I_\varepsilon} ||a_i|| + \varepsilon \leq \sum_{i\in I_\varepsilon} ||a_i|| + \varepsilon$.

Remarque 1 On peut constater tout de suite qu'une famille indexée par $\mathbb{N}$ et donnant une série convergente n'est pas forcément une famille sommable.
Par exemple, la famille $(\frac{(-1)^{n+1}}{n})_{n\in N^*}$ donne la série convergente ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$) mais n'est pas sommable. En effet, $\{A_J\ /\ J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}$ n'est pas borné. Il suffit pour le voir, de considérer pour tout entier n, les sommes sur les parties finies $J_n = \{2k\ /\ k \in \mathbb{N}^*\ et\ k \leq n\}$:
$A_{J_n} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Tout vient de ce que les sommes partielles d'une série sont des sommes sur des parties finies particulières, à savoir des parties *commençantes* du type $I_n = \{k \in \mathbb{N}\ /\ 0 \leq k \leq n\}$.

Théorème 3 ***pour les familles de réels positifs***
Une famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs est sommable si et seulement si l'ensemble des sommes sur les parties finies de I est majoré.
On a alors $A = \sup_{J\in\mathcal{P}_f(I)} A_J$.

Preuve : La propriété 3 fournit la preuve dans un sens.
Pour la réciproque, on considère une famille sommable $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs pour la quelle $A = \sup_{J\in\mathcal{P}_f(I)} A_J$ est défini.
On a : $\forall\varepsilon > 0\ ,\ \exists I_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(I)\ /\ A - \varepsilon < A_{I_\varepsilon} < A$

et comme les éléments de la famille sont positifs,
$\forall J \in \mathcal{P}_f(I)$, $I_\varepsilon \subset J \Longrightarrow A - \varepsilon < A_{i_\varepsilon} \leq A_J \leq A$ donc : $0 \leq A - A_J \leq \varepsilon$.

Propriété 4 : Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs indexées par le même ensemble I .
Si $(b_i)_{i\in I}$ est sommable et si $\forall i \in I$, $a_i \leq b_i$ alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable.
Preuve : triviale.

2 Familles absolument sommables

Définition 3 Absolue sommabilité
Une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'un espace vectoriel normé E est *absolument sommable* si et seulement si la famille de réels positifs $(||a_i||)_{i\in I}$ est sommable.

Théorème 4 ***sur l'absolue sommabilité dans un Banach***
Dans un Banach, une famille absolument sommable est sommable.

Preuve : Soit une famille $(a_i)_{i\in I}$ absolument sommable d'un Banach E.
La famille $(||a_i||)_{i\in I}$ est sommable donc vérifie le critère de Cauchy :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists I_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(I)$ / $\forall J \in \mathcal{P}_f(I)$ $\quad I_\varepsilon \cap J = \varnothing \Longrightarrow \sum_{i\in J} ||a_i|| \leq \varepsilon$.
Comme $||A_J|| = || \sum_{i\in J} a_i|| \leq \sum_{i\in J} ||a_i||$, on a :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists I_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(I)$ / $\forall J \in \mathcal{P}_f(I)$ $\quad I_\varepsilon \cap J = \varnothing \Longrightarrow ||A_J|| \leq \varepsilon$.
La famille $(a_i)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy et comme E est complet, elle est sommable.

Théorème 5 ***sur l'absolue sommabilité en dimension finie***
Une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'un espace vectoriel normé de dimension finie est sommable si et seulement si elle est absolument sommable.

Preuve : Le théorème précédent donne le résultat dans un sens puisqu'un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.
Voyons d'abord la réciproque pour une famille sommable $(a_i)_{i\in I}$ de réels ($E = \mathbb{R}$) :
D'après la propriété 3, l'ensemble des sommes sur les parties finies est borné donc :
$\exists k > 0$ / $\forall J \in \mathcal{P}_f(I)$, $-k \leq A_J \leq k$.
Mais alors : $\sum_{i\in J} |a_i| = \sum_{i\in J^+} a_i - \sum_{i\in J^-} a_i \leq 2k$
avec $J^+ = \{i \in J \ / \ a_i \geq 0\}$ et $J^- = \{i \in J \ / \ a_i < 0\}$
et bien entendu $(J^+, J^-) \in \mathcal{P}_f(I)^2$.
Ainsi, l'ensemble des sommes sur les parties finies de I de la famille de réels positifs $(|a_i|)_{i\in I}$ est majoré ; $(|a_i|)_{i\in I}$ est donc sommable d'après le théorème 3.

Pour le cas général, on remarquera qu'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$ peut être considéré comme un espace de dimension $2n$ sur $\mathbb{R}$ et l'on supposera donc dans la suite que l'espace vectoriel est réel.
Soit donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n ; on notera $x = (x^k)_{1\leq k\leq n}$ ses éléments.
$(a_i)_{i\in I}$ étant une famille sommable de E de somme A , pour tout entier k compris entre 1 et n, les familles $(a_i^k)_{i\in I}$ sont sommables de sommes A^k.
On le voit en utilisant la norme sup , ce qui est légitime puisqu'en dimension finie, toutes les

normes sont équivalentes :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists I_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(I)$ / $\forall J \in \mathcal{P}_f(I)$ $\quad I_\varepsilon \subset J \Longrightarrow ||A - A_J||_\infty = \sup_{1\leq k\leq n} |A^k - A_J^k|$
$= \sup_{1\leq k\leq n} |A^k - \sum_{i\in J} a_i^k| \ \leq \varepsilon$
donc, pour tout entier k compris entre 1 et n :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists I_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(I)$ / $\forall J \in \mathcal{P}_f(I)$ $\quad I_\varepsilon \subset J \Longrightarrow |A^k - \sum_{i\in J} {a_i}^k| \leq \varepsilon$.
En utilisant cette fois la norme 1 ($\forall x = (x^k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^n$, $||x||_1 = \sum_{k=1}^n |x^k|$), on a d'après ce qui précède pour le cas réel, pour tout entier k compris entre 1 et n, la sommabilité des familles $(|a_i^k|)_{i\in I}$ puis, d'après la propriété 1, la sommabilité de la famille $(\sum_{k=1}^n |a_i^k|)_{i\in I} = (||a_i||_1)_{i\in I}$.
La famille $(a_i)_{i\in I}$ est donc absolument sommable.

3 Regroupements

Il s'agit en gros de parler ici de "l'associativité de la sommation".

Théorème 6 ***de regroupement***
Soit une famille sommable $(a_i)_{i\in I}$ de somme A d'un Banach E et $(I_k)_{k\in K}$ une partition de I.
On a alors :
1. $\forall k \in K$, $(a_i)_{i\in I_k}$ est sommable et si $b_k = \sum_{i\in I_k} a_i$,
2. $(b_k)_{k\in K}$ est sommable et $A = \sum_{k\in K} b_k$.
Ainsi $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K}(\sum_{i\in I_k} a_i)$.

Preuve : Le premier point est une conséquence de la propriété 2.
Pour la suite, $(a_i)_{i\in I}$ est sommable de somme A d'où :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists I_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(I)$ / $\forall J \in \mathcal{P}_f(I)$ $\quad I_\varepsilon \subset J \Longrightarrow ||A - A_J|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Alors, $H_\varepsilon = \{k \in K \ / \ I_\varepsilon \cap I_k \neq \varnothing\}$ est fini.
En effet : $k \mapsto x_k \in I_\varepsilon \cap I_k$ (axiome du choix) est une injection de H_ε dans I_ε car :
$k \neq k' \Longrightarrow x_k \neq x_{k'}$ puisque : $x_k \in I_k$, $x_{k'} \in I_{k'}$ et $I_k \cap I_{k'} = \varnothing$ ($(I_k)_{k\in K}$ une partition de I).
On conclut donc que le cardinal de H_ε est inférieur à celui de I_e qui est fini, ainsi H_ε est fini.
Pour achever la démonstration, on va montrer que :
$\forall H \in \mathcal{P}_f(K) \quad H_\varepsilon \subset H \Longrightarrow || \sum_{k\in H} b_k - A|| \leq \varepsilon$:
Soit donc $H \in \mathcal{P}_f(K)$ avec $H_\varepsilon \subset H$.
D'abord, $\forall k \in K$, comme $(a_i)_{i\in I_k}$ est sommable de somme b_k , on a :
$\exists I_{k,\varepsilon,H} \in \mathcal{P}_f(I_k)$ / $\forall J' \in \mathcal{P}_f(I_k) \quad I_{k,\varepsilon,H} \subset J' \Longrightarrow ||b_k - A_{J'}|| \leq \frac{\varepsilon}{2Card(H)}$
et si $L_{k,\varepsilon,H} = I_{k,\varepsilon,H} \cup (I_\varepsilon \cap I_k)$, $L_{k,\varepsilon,H}$ est une partie finie de I_k et on a :
$I_{k,\varepsilon,H} \subset L_{k,\varepsilon,H}$ donc $||b_k - A_{L_{k,\varepsilon,H}}|| \leq \frac{\varepsilon}{2Card(H)}$.
Ensuite, $\forall (k, k') \in H^2$,
$k \neq k' \Longrightarrow L_{k,\varepsilon,H} \cap L_{k',\varepsilon,H} = (I_{k,\varepsilon,H} \cup (I_\varepsilon \cap I_k)) \cap (I_{k',\varepsilon,H} \cup (I_\varepsilon \cap I_{k'})) \subset I_k \cap I_{k'} = \varnothing$.
De plus, comme $(I_k)_{k\in K}$ partitionne I et d'après la définition de H_ε ,
$I_\varepsilon = \cup_{k\in K} I_k \cap I_\varepsilon = \cup_{k\in H_\varepsilon} I_k \cap I_\varepsilon \subset \cup_{k\in H_\varepsilon} L_{k,\varepsilon,H} \subset \cup_{k\in H} L_{k,\varepsilon,H}$.
Alors, tenant compte des deux points précédents, on a :
$|| \sum_{k\in H} b_k - A|| \leq || \sum_{k\in H} b_k - \sum_{k\in H} A_{L_{k,\varepsilon,H}}|| + || \sum_{k\in H} A_{L_{k,\varepsilon,H}} - A||$
$\leq \sum_{k\in H} ||b_k - A_{L_{k,\varepsilon,H}}|| + || \sum_{i\in\cup_{k\in H} L_{k,\varepsilon,H}} a_i - A|| \leq \sum_{k\in H} \frac{\varepsilon}{2Card(H)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
ce qui est le résultat cherché.

Théorème 7 ***"Pseudo-réciproques" du théorème de regroupement***
1. $(a_i)_{i\in I}$ *étant une famille de réels positifs, si* $(I_k)_{k\in K}$ *est une partition de* I *telle que*
a. $\forall k \in K$, $(a_i)_{i\in I_k}$ *est sommable et si* $b_k = \sum_{i\in I_k} a_i$,
b. $(b_k)_{k\in K}$ *est sommable,*
alors $(a_i)_{i\in I}$ *est sommable et* $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K} b_k = \sum_{k\in K}(\sum_{i\in I_k} a_i)$.
2.$(a_i)_{i\in I}$ *étant une famille d'un Banach, si* $(I_k)_{k\in K}$ *est une partition de* I *telle que*
a. $\forall k \in K$, $(||a_i||)_{i\in I_k}$ *est sommable et si* $\beta_k = \sum_{i\in I_k} ||a_i||$,
b. $(\beta_k)_{k\in K}$ *est sommable,*
alors $(a_i)_{i\in I}$ *est absolument sommable.*

Preuve de *1.* $\forall J \in \mathcal{P}_f(I)$, $K_J = \{k \in K \ / \ J \cap I_k \neq \varnothing\}$ est fini.
En effet : $k \mapsto x_k \in J \cap I_k$ (axiome du choix) est une injection de K_J dans J car :
$k \neq k' \Longrightarrow x_k \neq x_{k'}$ puisque : $x_k \in I_k$, $x_{k'} \in I_{k'}$ et $I_k \cap I_{k'} = \varnothing$ ($(I_k)_{k\in K}$ une partition de I).
On conclut donc que le cardinal de K_J est inférieur à celui de J qui est fini, ainsi K_J est fini.
On a alors : $J = \cup_{k\in K} J \cap I_k = \cup_{k\in K_J} J \cap I_k$
avec $\forall (k,k') \in K_J$, $k \neq k' \Longrightarrow (J\cap I_k) \cap (J \cap I_{k'}) = \varnothing$ et :
$A_J = \sum_{i\in \cup_{k\in K_J} J\cap I_k} a_i = \sum_{k\in K_J} \sum_{i\in J\cap I_k} a_i \leq \sum_{k\in K_J} b_k \leq \sum_{k\in K} b_k$.
Ainsi l'ensemble des sommes sur les parties finies de la famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs est majoré et la famille est sommable.
Le théorème 6 de regroupement donne alors lui même l'égalité des sommes.

Preuve de *2.* On applique le cas précédent à la famille $(||a_i||)_{i\in I}$; on peut alors conclure car l'espace est complet.

Pour terminer cette section, remarquons avec Gustave [1] que, contrairement à ce qui se passe pour les séries, le problème de "la commutativité de la sommation" ne se pose pas vraiment puisque, dans la définition de la sommabilité d'une famille $(a_i)_{i\in I}$, l'ensemble des indices I n'est pas ordonné.

4 Relations entre familles et séries

Définition 4 Série commutativement convergente
Une série $\sum_{n\in N} a_n$ d'un espace vectoriel normé est *commutativement convergente* si et seulement si pour toute bijection ϕ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n\in N} a_{\phi(n)}$ converge.
Toutes les séries obtenues ont alors même somme comme on le verra dans le théorème suivant.

Théorème 8 ***Séries commutativement convergentes / familles sommables***
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *étant une suite (famille indexée par* $\mathbb{N}$*) d'un espace vectoriel normé, les deux propositions suivantes sont équivalentes :*
1. la série $\sum_{n\in N} a_n$ *converge commutativement,*
2. la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est sommable.*
Alors, si ces propriétés sont vérifiées, pour toute bijection ϕ *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *, la série* $\sum_{n\in N} a_{\phi(n)}$ *et la famille* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ont même somme.*

Preuve : *Commençons par* $2. \Longrightarrow 1.$

Si A est la somme de la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :
$\forall\varepsilon > 0\ ,\ \exists I_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\ /\ \forall J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \quad I_\varepsilon \subset J \Longrightarrow ||A - A_J|| \leq \varepsilon$.
Ainsi, si n_ε est le plus grand élément de I_ε , on a bien :
$\forall\varepsilon > 0\ ,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_e \Longrightarrow ||A - \sum_{i=0}^{n} a_i|| = ||A - A_{J_n}|| \leq \varepsilon$
où $J_n = \{i \in \mathbb{N}\ /\ 0 \leq i \leq n\}$ et $I_\varepsilon \subset J_n$
et la série $\sum_{n\in N} a_n$ converge vers A .

De la même façon, si ϕ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, à partir d'un certain rang $n_{\phi,\varepsilon}$, tous les entiers inférieurs ou égaux à n_ε sont dans l'image par ϕ des entiers inférieurs ou égaux à $n_{\phi,\varepsilon}$, d'où :
$\forall\varepsilon > 0\ ,\ \exists n_{\phi,\varepsilon} \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_{\phi,\varepsilon}$
$\Longrightarrow I_\varepsilon \subset \{i \in \mathbb{N}\ /\ 0 \leq i \leq n_\varepsilon\} \subset J_{\phi,n} = \{\phi(i)\ /\ i \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq i \leq n\}$
et ainsi :
$\forall\varepsilon > 0\ ,\ \exists n_{\phi,\varepsilon} \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_{\phi,e} \Longrightarrow ||A - \sum_{i=0}^{n} a_{\phi(i)}|| = ||A - A_{J_{\phi,n}}|| \leq \varepsilon$
et la série $\sum_{n\in N} a_{\phi(n)}$ converge vers A .

Voyons maintenant $1 \Longrightarrow 2.$; on va plutôt montrer que la négation de 2. entraine celle de 1.

Soit donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille non sommable.

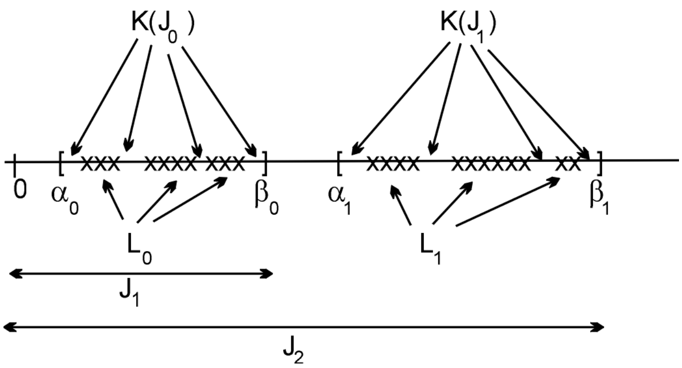
Il y a deux cas.

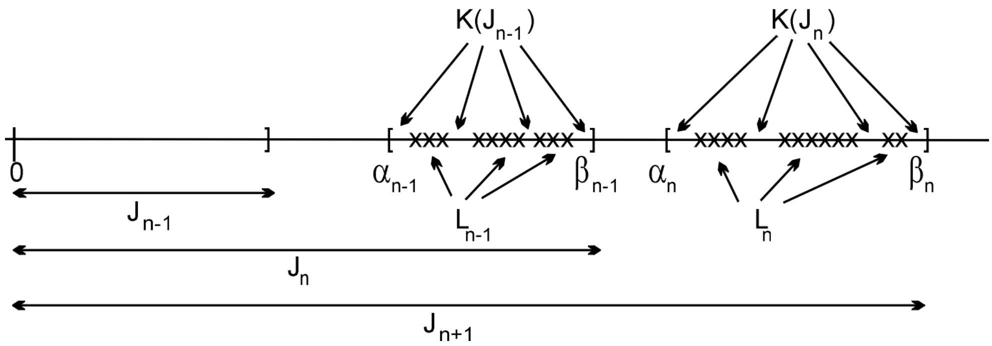
Premier cas : la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne vérifie pas le critère de Cauchy :

$\exists\varepsilon > 0\ /\ \forall J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\ /\ \exists K(J) \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\ \ /\ \ J \cap K(J) = \varnothing$ et $||A_{K(J)}|| > \varepsilon$.
On applique cette caractérisation aux parties $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies de la façon suivante :
$J_0 = \varnothing$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ J_n = \{i \in \mathbb{N}\ \ /\ \ 0 \leq i \leq \max(K(J_{n-1}))\}$:
$J_0 = \varnothing$ donne $K(J_0) \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ avec $||A_{K(J_0)}|| > \varepsilon$,
$J_1 = \{i \in \mathbb{N}\ \ /\ \ 0 \leq i \leq \max(K(J_0))\}$ donne $K(J_1) \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ avec $||A_{K(J_1)}|| > \varepsilon$
et $K(J_0) \cap K(J_1) \subset J_1 \cap K(J_1) = \varnothing$.
Puis, si pour n entier strictement positif, les $K(J_p)_{0\leq p\leq n-1}$ sont construits,
$J_n = \{i \in \mathbb{N}\ \ /\ \ 0 \leq i \leq \max(K(J_{n-1}))\}$ donne $K(J_n) \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ avec $||A_{K(Jn)}|| > \varepsilon$
et $\forall p \in \mathbb{N}\ ,\ \ 0 \leq p \leq n-1 \Longrightarrow K(J_p) \cap K(J_n) \subset J_{p+1} \cap K(J_n) \subset J_n \cap K(J_n) = \varnothing$.
On a alors :
$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ K(J_n) \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ et $||A_{K(J_n)}|| > \varepsilon$,
$\forall (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ ,\ \ n \neq m \Longrightarrow K(J_n) \cap K(J_m) = \varnothing$.

Pour tout entier n , on pose :
$\alpha_n = \min(K(J_n))$, $\beta_n = \max(K(J_n))$, $k_n =$ cardinal$(K(J_n))$,
$L_n = \{i \in \mathbb{N}\ /\ \ \alpha_n \leq i \leq \beta_n \text{ et } i \notin K(J_n)\}$.
On construit alors une bijection ϕ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en numérotant de leur plus petit à leur plus grand élément et consécutivement les ensembles suivants :

$\{i \in \mathbb{N}\ /\ \ 0 \leq i \leq \alpha_0 - 1\}$, $K(J_0)$, L_0 ,
$\{i \in \mathbb{N}\ /\ \ \beta_0 + 1 \leq i \leq \alpha_1 - 1\}$, $K(J_1)$, L_1 ,
...
$\{i \in \mathbb{N}\ /\ \ \beta_{n-1} + 1 \leq i \leq \alpha_n - 1\}$, $K(J_n)$, L_n ,
...
On peut représenter les ensembles servant à cette numérotation par les deux dessins suivants :





Ainsi :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m_n \in \mathbb{N}$ / $K(J_n) = \{\phi(i)$ / $i \in \mathbb{N}$ et $m_n \leq i \leq m_n + k_n - 1\}$
($\phi(m_n) = \alpha_n$) et donc $A_{K(J_n)} = \sum_{i=m_n}^{i=m_n+k_n-1} a_{\phi(i)}$.
On a $\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$
(car $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \geq n$ donc $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$ puis, comme ϕ est une bijection ϕ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \phi^{-1}(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} m_n = \infty$) et :
$\forall r \in \mathbb{N}$, $\exists n_r \in \mathbb{N}$ / $m_{n_r} \geq r+1$.
Alors, si $p_r = m_{n_r} - 1$ et $q_r = m_{n_r} + k_{n_r} - 1$, on a :
$q_r > p_r \geq r$ et $|| \sum_{i=p_r+1}^{q_r} a_{\phi(i)} || = ||A_{K(J_{n_r})}|| > \varepsilon$.
On a donc montré :
$\exists \varepsilon > 0$ / $\forall r \in \mathbb{N}$, $\exists (p_r, q_r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ / $q_r > p_r \geq r$ *et* $|| \sum_{i=p_r+1}^{q_r} a_{\phi(i)} || > \varepsilon$.

Ainsi, $\sum_{n\in N} a_{\phi(n)}$ ne vérifie pas le critère de Cauchy et diverge.
On a donc trouvé une bijection ϕ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{n\in N} a_{\phi(n)}$ diverge et donc, la série $\sum_{n\in N} a_n$ ne converge pas commutativement.

Deuxième cas : la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists J_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ / $\forall J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ $\quad J \cap J_\varepsilon = \varnothing \Longrightarrow ||A_J|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

On va montrer que la série $\sum_{n\in N} a_n$ ne converge pas ; a fortiori, elle ne convergera donc pas commutativement.

Raisonnons par l'absurde et supposons que la série $\sum_{n\in N} a_n$ converge vers A :
$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ / $||A - \sum_{i=0}^{n_\varepsilon} a_i|| = ||A - A_{H_\varepsilon}|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
(avec $H_\varepsilon = \{i \in \mathbb{N}$ / $0 \leq i \leq n_\varepsilon\}$) ;
on impose de plus $n_\varepsilon \geq \max(J_\varepsilon)$ ainsi $J_\varepsilon \subset H_\varepsilon$.
Puis :
$\forall H \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$,
$H_\varepsilon \subset H \Longrightarrow ||A - A_H|| = ||A - A_{H_\varepsilon \cup (H \setminus H_\varepsilon)}|| = ||A - A_{H_\varepsilon} - A_{H\setminus H_\varepsilon}||$

$\leq ||A - A_{H_\varepsilon}|| + ||A_{H\backslash H_\varepsilon}|| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
(car $(H\backslash H_\varepsilon) \cap J_\varepsilon = \varnothing$) .
On a donc montré :
$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists H_\varepsilon \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \ / \ \forall H \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \quad H_\varepsilon \subset H \Longrightarrow ||A - A_H|| \leq \varepsilon$
et la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable contrairement à l'hypotèse ce qui est la contradiction cherchée.

Ainsi $\sum_{n\in N} a_n$ diverge est n'est donc pas commutativement convergente.

Théorème 9 ***Familles absolument sommables / séries commutativement convergentes***
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite (famille indexée par $\mathbb{N}$) d'un espace vectoriel normé, les deux propositions suivantes sont équivalentes :
1. la série $\sum_{n\in N} a_n$ converge absolument,
2. la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument sommable.
Les sommes de la série et de la famille sont alors égales.

Preuve : elle est maintenant immédiate :
$\sum_{n\in N} ||a_n||$ converge $\Longleftrightarrow \{\sum_{n=0}^{N} ||a_n|| \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est majoré
(classique pour des séries à termes positifs)
$\Longleftrightarrow \{\sum_{n\in I} ||a_n|| \ / \ I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}$ est majoré (immédiat)
$\Longleftrightarrow (||a_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable (théorème 3)

On obtient alors facilement les corollaires suivants :

Corollaire 2 ***Séries de réels positifs / familles sommables***
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de réels positifs, les deux propositions suivantes sont équivalentes :
1. la série $\sum_{n\in N} a_n$ converge,
2. la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.
Les sommes de la série et de la famille sont alors égales.

Corollaire 3 ***Convergence absolue / convergence commutative des séries***
Etant donnée une série $\sum_{n\in N} a_n$ dans un espace vectoriel normé E,
1. si E est complet :
la série $\sum_{n\in N} a_n$ converge absolument $\Longrightarrow$ la série $\sum_{n\in N} a_n$ converge commutativement,
2. si E est de dimension finie :
la série $\sum_{n\in N} a_n$ converge commutativement $\Longleftrightarrow$ la série $\sum_{n\in N} a_n$ converge absolument.

Preuve : $\sum_{n\in N} a_n$ converge absolument $\overset{\text{théorème 9}}{\Longrightarrow}$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absolument sommable
$\underset{\text{E complet}}{\overset{\text{théorème 4}}{\Longrightarrow}}$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable $\overset{\text{théorème 8}}{\Longrightarrow}$ $\sum_{n\in N} a_n$ converge commutativement .

Puis : $\sum_{n\in N} a_n$ converge commutativement $\overset{\text{théorème 8}}{\Longrightarrow}$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable
$\underset{\text{dimension finie}}{\overset{\text{théorème 5}}{\Longrightarrow}}$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absolument sommable $\underset{||a_n|| \, > \, 0}{\overset{\text{corollaire 2}}{\Longrightarrow}}$ $\sum_{n\in N} a_n$ converge absolument .

On trouvera résumés tous ces résultats dans le schéma en avant-dernière page.

La question de l'"associativité de la sommabilité" des familles a été réglée avec les théorèmes 6 et 7. Elle se pose néanmoins pour les séries (addition par "paquets"). Bien que pour ces dernières, elle ne soit pas directement liée à la notion de famille sommable, il semble cependant naturel de l'aborder ici.

Théorème 10 ***convergence associative des séries***
Soit $\sum_{n\in N} a_n$ *une série convergente d'un espace vectoriel normé.*
Pour toute application strictement croissante ϕ *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *nulle en* 0 *,*
si, pour tout entier n *on pose* $a_n^\phi =.\sum_{p=\phi(n)}^{\phi(n+1)-1} a_p$ *,*
alors, la série $\sum_{n\in N} a_n^\phi$ *converge et* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^\phi$ *,*
c'est à dire : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=\phi(n)}^{\phi(n+1)-1} a_p$ *.*

Remarque 2 C'est en ce sens qu'on peut dire que la convergence des séries dans un espace vectoriel normé est "associative".

Preuve : Considèrons les suites des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n^\phi)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout entier n par : $S_n = \sum_{p=0}^{n} a_p$ et $S_n^\phi = \sum_{p=0}^{n} a_p^\phi$.
On a pour tout entier n : $S_n^\phi = S_{\phi(n+1)-1}$.
$(S_n^\phi)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite extraite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'où le résultat.

Il est possible de mettre en évidence quelques cas importants constituant des sortes de réciproques du théorème précédent :

Théorème 11 ***"Pseudo-réciproques" du théorème de convergence associative des séries***
Dans un espace vectoriel normé E*,*
soit une série $\sum_{n\in N} a_n$ *pour la quelle existe une application strictement croissante* ϕ *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *nulle en* 0 *telle que si, pour tout entier* n *on pose* $a_n^\phi = \sum_{p=\phi(n)}^{\phi(n+1)-1} a_p$ *, la série* $\sum_{n\in N} a_n^\phi$ *converge.*

1er cas*. Si les deux conditions suivantes sont réalisées :*
a. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
b. $\exists M \geq 0 \ / \ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \ \phi(n+1) - \phi(n) \leq M$ *(la "longueur des paquets" est bornée)*
alors $\sum_{n\in N} a_n$ *converge et* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^\phi$*.*

2ème cas*. Si les deux conditions suivantes sont réalisées :*
a. $E = \mathbb{R}$ *(la série est à termes réels),*
b. $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall p \in \mathbb{N}\ ,\ \ \phi(n) \leq p \leq \phi(n+1) - 1 \Longrightarrow signe(u_p) = signe(u_n)$
(les éléments de chaque paquet sont de même signe),
alors $\sum_{n\in N} a_n$ *converge et* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^\phi$*..*

Preuve : Par hypothèse, ϕ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \exists! p_n \in \mathbb{N} \ / \ \ \phi(p_n) \leq n < \phi(p_n + 1)$
et aussi : $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$
(en fait, $p_n = \max(\phi(\{i \in \mathbb{N} \ / \ \ 0 \leq i \leq n\})^{-1})$) .

1er cas. Pour tout entier n, on a, avec les notations de la preuve du théorème 10 :
si $m_n = \sup_{k\geq n} ||a_k||$, $\lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ puis :
$||S^{\phi}_{p_n} - S_n|| = ||\sum_{k=n+1}^{\phi(p_n+1)-1} a_k|| \leq \sum_{k=n+1}^{\phi(p_n+1)-1} ||a_k||$
$\leq (\phi(p_n+1) - n - 1)m_n \leq (\phi(p_n+1) - \phi(p_n))m_n \leq Mm_n$
et donc $\lim_{n\to\infty} S^{\phi}_{p_n} - S_n = 0$.
Or, par hypothèse, $\sum_{n\in N} a^{\phi}_n$ converge c'est à dire que la suite $(S^{\phi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. $(p_n)_{n\in N}$ étant une suite croissante mais pas à priori strictement croissante, $(S^{\phi}_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas exactement une suite extraite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut néanmoins prouver sa convergence :
$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \ n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow ||S^{\phi}_n - S|| \leq \varepsilon$ (avec $S = \lim_{n\to\infty} S^{\phi}_n$)
or $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$ donc :
$\exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \ n \geq m_\varepsilon \Longrightarrow p_n \geq n_\varepsilon$ d'où :
$\forall\varepsilon > 0\ \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \ n \geq m_\varepsilon \Longrightarrow ||S^{\phi}_{p_n} - S|| \leq \varepsilon.$
Ainsi $(S^{\phi}_{p_n})_{n\in N}$ converge et de plus $\lim_{n\to\infty} S^{\phi}_{p_n} = S.$
Comme on a montré que $\lim_{n\to\infty} S^{\phi}_{p_n} - S_n = 0$, on en déduit $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ qui est le résultat cherché.

2ème cas. Soit un entier n .
Dans le cas, par exemple, de termes a_p positifs pour p entre $\phi(p_n)$ et $\phi(p_n+1) - 1$, on a :
$S^{\phi}_{p_n-1} = \sum_{p=0}^{\phi(p_n)-1} a_p \leq \sum_{p=0}^{\phi(p_n)-1} a_p + \sum_{p=\phi(p_n)}^{n} a_p = S_n \leq \sum_{p=0}^{\phi(p_n)-1} a_p + \sum_{p=\phi(p_n)}^{\phi(p_n+1)-1} a_p = S^{\phi}_{p_n}$
et : $|S^{\phi}_{p_n} - S_n| \leq |S^{\phi}_{p_n} - S^{\phi}_{p_n-1}|$.
On trouve bien entendu la même majoration avec des termes a_p négatifs pour p entre $\phi(p_n)$ et $\phi(p_n+1) - 1$.
On montre comme dans le premier cas que $\lim_{n\to\infty} S^{\phi}_{p_n} = S$ avec $S = \lim_{n\to\infty} S^{\phi}_n$;
on montrerait de façon identique que $\lim_{n\to\infty} S^{\phi}_{p_n-1} = S$,
donc $\lim_{n\to\infty} |S^{\phi}_{p_n} - S^{\phi}_{p_n-1}| = 0$ puis $\lim_{n\to\infty} |S^{\phi}_{p_n} - S_n| = |S - S| = 0$
et enfin $\lim_{n\to\infty} S^{\phi}_{p_n} = \lim_{n\to\infty} S_n = S$.

5 Quelques applications et exemples

A Séries doubles

Théorème 12 ***Un théorème de séries doubles***
Soit $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *une suite double d'un Banach.*
Si les hypothèses suivantes sont réalisées :
1. $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{q\geq 0} ||a_{p,q}||$ *converge,*
2 $\sum_{p\geq 0}\sum_{q=0}^{\infty} ||a_{p,q}||$ *converge,*
alors : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum_{p\geq 0} ||a_{p,q}||$ *et* $\sum_{q\geq 0}\sum_{p=0}^{\infty} ||a_{p,q}||$ *convergent,*
et/donc :
$\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{q\geq 0} a_{p,q}$, $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum_{p\geq 0} a_{p,q}$, $\sum_{p\geq 0}\sum_{q=0}^{\infty} a_{p,q}$ *et* $\sum_{q\geq 0}\sum_{p=0}^{\infty} a_{p,q}$
convergent absolument
et : $\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{p,q}$.

Preuve : on applique les théorèmes 6 , 7 et 9.
Le théorème 7 "pseudo-réciproques du théorème de regroupement - cas 2" appliqué à la partition de $\mathbb{N}^2$ suivante : $\mathbb{N}^2 = \cup_{q\in\mathbb{N}} I_q$ avec $\forall q \in \mathbb{N}$, $I_q = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2\ /\ p \in \mathbb{N}\}$ prouve l'absolue

sommabilité de la famille $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.
L'espace étant complet, le théorème 6 de regroupement permet alors de conclure en utilisant la partition duale de $\mathbb{N}^2$ suivante : $\mathbb{N}^2 = \cup_{p\in\mathbb{N}} J_p$ avec $\forall p \in \mathbb{N}$, $J_p = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \ / \ q \in \mathbb{N}\}$ et sachant par le théorème 9 que des familles absolument sommables indexées dans $\mathbb{N}$ donnent des séries absolument convergentes.

Une preuve directe n'utilisant pas les résultats sur les familles sommables est bien entendu possible :
$\forall q \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $||a_{p,q}|| \leq \sum_{q=0}^{\infty} ||a_{p,q}||$ terme général d'une série convergente par hypoyhèse, donc :
$\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum_{p\geq 0} ||a_{p,q}||$ converge ($\sum_{p\geq 0} a_{p,q}$ converge absolument).
On obtient alors l'ensemble des résultats par les majorations ci-dessous :
$\forall Q \in \mathbb{N}$,
$A_Q = || \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{p,q} - \sum_{q=0}^{Q} \sum_{p=0}^{\infty} a_{p,q}|| = || \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{p,q} - \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{Q} a_{p,q}||$,
l'inversion correspondant à une somme de séries convergentes, puis :
$A_Q = || \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=Q+1}^{\infty} a_{p,q}|| \leq \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=Q+1}^{\infty} ||a_{p,q}|| = B_Q$.
Remarquons que : $| \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} ||a_{p,q}|| - \sum_{q=0}^{Q} \sum_{p=0}^{\infty} ||a_{p,q}|| \ | = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=Q+1}^{\infty} ||a_{p,q}|| = B_Q$
ce qui permettra d'obtenir in fine toutes les convergences absolues demandées.
Comme $\sum_{p\geq 0} \sum_{q=0}^{\infty} ||a_{p,q}||$ converge, on a :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_\varepsilon \in \mathbb{N}$ / $\sum_{p=P_\varepsilon+1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} ||a_{p,q}|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et :
$B_Q \leq \sum_{p=0}^{P_\varepsilon} \sum_{q=Q+1}^{\infty} ||a_{p,q}|| + \sum_{p=P_\varepsilon+1}^{\infty} \sum_{q=Q+1}^{\infty} ||a_{p,q}|| \leq \sum_{p=0}^{P_\varepsilon} \sum_{q=Q+1}^{\infty} ||a_{p,q}|| + \sum_{p=P_\varepsilon+1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} ||a_{p,q}||$
et : $B_Q \leq \sum_{p=0}^{P_\varepsilon} \sum_{q=Q+1}^{\infty} ||a_{p,q}|| + \frac{\varepsilon}{2}$.
Enfin, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\lim_{Q\to\infty} \sum_{q=Q+1}^{\infty} ||a_{p,q}|| = 0$ (restes de séries convergentes) donc aussi :
$\lim_{Q\to\infty} \sum_{p=0}^{P_\varepsilon} \sum_{q=Q+1}^{\infty} ||a_{p,q}|| = 0$ (somme finie de suites convergentes) et :
$\exists Q_\varepsilon \in \mathbb{N}$ / $\forall Q \in \mathbb{N}$, $Q \geq Q_\varepsilon \Longrightarrow \sum_{p=0}^{P_\varepsilon} \sum_{q=Q+1}^{\infty} ||a_{p,q}|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $B_Q \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
On a finalement établi que :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \ Q_\varepsilon \in \mathbb{N}$ / $\forall Q \in \ \mathbb{N}$, $Q \geq Q_\varepsilon \Longrightarrow$
$|| \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{p,q} - \sum_{q=0}^{Q} \sum_{p=0}^{\infty} a_{p,q}|| \leq | \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} ||a_{p,q}|| - \sum_{q=0}^{Q} \sum_{p=0}^{\infty} ||a_{p,q}|| \ | \leq \varepsilon$
ce qui donne les résultats cherchés.

B Exemple de série absolument convergente et non convergente

Il faut donc se placer dans un espace vectoriel normé non complet.
On choisit $E = \mathbb{R}[X]$, espace vectoriel des polynômes à coefficients réels muni de la norme suivante :
$\forall P \in E$, si $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, $||P|| = \max_{0\leq k\leq d} |a_k|$.
Le fait de trouver une série absolument convergente et non convergente prouvera d'ailleurs que E ainsi normé n'est pas complet.[1]

Considérons donc la série suivante :
$\sum_{n\geq 0} U_n$ avec : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n(X) = \frac{X^n}{2^n}$.
$\sum_{n\geq 0} ||U_n|| = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge.
Supposons la série convergente vers un polynôme L .

[1] Signalons en passant que la propriété est caractéristique de la complétude : un espace vectoriel normé où la convergence absolue des séries entraîne leur convergence simple, est complet.

Si $L = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, pour tout entier n supérieur strictement à d, le coefficient du terme de degré $d+1$ de $L - \sum_{p=0}^{n} U_p$ est $\frac{-1}{2^{d+1}}$
donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > d \Longrightarrow ||L - \sum_{p=0}^{n} U_p|| \geq \frac{1}{2^{d+1}}$
ce qui contredit la convergence de $\sum_{n\geq 0} U_n$ vers L .

C Un théorème fort sur la convergence commutative des séries réelles

Théorème 13 *Soit une série réelle $\sum_{n\geq 0} u_n$ semi-convergente (convergente et non absolument convergente).*
Pour tout couple d'éléments (a,b) de $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, il existe une bijection ϕ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} u_{\phi(n)}$ soit l'intervalle $[a,b]$.
Avec les abus de notation habituels, cela signifie donc que,
. si $a = b \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 0} u_{\phi(n)}$ converge et a pour somme a : $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\phi(n)} = a$,
. si $a = b = +\infty$, $\sum_{n\geq 0} u_{\phi(n)}$ diverge "vers $+\infty$" : $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\phi(n)} = +\infty$,
. si $a = b = -\infty$, $\sum_{n\geq 0} u_{\phi(n)}$ diverge "vers $-\infty$" : $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\phi(n)} = -\infty$,
. si $a \neq b$ et si pour tout entier n , $S_n =: \sum_{k=0}^{n} u_k$, alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est
$[a,b]$ si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $[a,+\infty[$ si $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$, $]-\infty, b]$ si $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$,
$]-\infty, +\infty[$ si $a = -\infty$ et $b = +\infty$.

Preuve :
Xxxxx

D Une belle application à la dénombrabilité des points de discontinuité d'une fonction monotone

Proposition 1 *L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réelle monotone d'une variable réelle est dénombrable.*

Preuve : $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable de segments et une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables étant dénombrable, il suffit de démontrer le résultat pour une fonction définie sur un segment.
Soit donc une fonction réelle f définie et par exemple, croissante sur un segment $[a,b]$.
Considérons la famille $(f(x^+) - f(x^-))_{x\in]a,b[}$
où, pour tout x de $]a,b[$, $f(x^+) = \lim_{u\to x, u>x} f(u)$ et $f(x^-) = \lim_{u\to x, u<x} f(u)$;
f étant croissante, il s'agit d'une famille de réels positifs.
$\forall J \in \mathcal{P}_f(]a,b[)$, si J a n éléments, posons : $J = \{x_i \ / \ 1 \leq i \leq n\}$
avec $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ suite croissante.
Si $n = 1$, $A_J = f(x_1^+) - f(x_1^-) \leq f(b) - f(a)$;
si $n \geq 2$, on peut écrire :
$\sum_{x\in J} f(x^+) - f(x^-) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^+) - f(x_i^-) \leq \sum_{i=2}^{n-1} f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) + 2(f(b) - f(a))$
$= -f(x_1) - f(x_2) + f(x_{n-1}) + f(x_n) + 2(f(b) - f(a)) \leq 4(f(b) - f(a))$.
Toutes les sommes finies de la famille sont majorées donc, d'après le théorème 3, la famille est sommable.
Le corollaire 1 fondamental permet alors de conclure que $\{x \in]a,b[\ / \ f(x^+) - f(x^-) \neq 0\}$ est dénombrable et donc $\{x \in [a,b] \ / \ f$ non continue en $x\}$ est dénombrable.

E Exemple de référence

La famille $(\frac{1}{(m+n)^\alpha})_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

(La comparaison est à faire avec la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ qui converge si et seulement si $\alpha > 1$)

Preuve : on utilise la partition suivante de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$:

$\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* = \cup_{p\in\mathbb{N},p\geq 2} S_p$ où $\forall p\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $S_p = \{((m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \ / \ m+n=p\}$.

$\forall p\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $A_{S_p} = \sum_{m+n=p}\frac{1}{(m+n)^\alpha} = \text{cardinal}(S_p)\times\frac{1}{p^\alpha} = \frac{p-1}{p^\alpha} \underset{p\to\infty}{\sim} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$

et $\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^{\alpha-1}}$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

On conclut

. pour la convergence, avec le théorème 7 - pseudo réciproque cas 1,

. pour la divergence, avec la contraposée du théorème 6.

F Un dernier exemple

Etude de la famille $(\frac{1}{n^2-p^2})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2\backslash\Delta}$ où $\Delta = \{(n,n)\in\mathbb{N}^2\}$.

La partition $\mathbb{N}^2\backslash\Delta = \cup_{k\in\mathbb{Z}^*} D_k$ où $\forall k\in\mathbb{Z}^*$, $D_k = \{(n,p)\in\mathbb{N}^2 \ / \ n-p=k\}$

donne pour $k=1$: $A_{D_1} = \sum_{p\geq 0}\frac{1}{(p+1)^2-p^2} = \sum_{p\geq 0}\frac{1}{2p+1}$ qui est une série divergente.

La contraposée du théorème 6 entraine donc la non sommabilité de la famille.

Les sommes suivantes sont néanmoins calculables :

$\sum_{n=0}^\infty\sum_{p=0}^\infty\frac{1}{n^2-p^2}$ et $\sum_{p=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n^2-p^2}$

et sont bien entendue opposées puisque "formellement", on a :

$\sum_{n=0}^\infty\sum_{p=0}^\infty\frac{1}{n^2-p^2} = \sum_{r=0}^\infty\sum_{s=0}^\infty\frac{1}{r^2-s^2} = \sum_{p=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{p^2-n^2} = -\sum_{p=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n^2-p^2}$.

Calculons cette somme (ces sommes) :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall N\in\mathbb{N}$, $N > 2n \implies$

$\sum_{p=0,p\neq n}^N\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2n}\sum_{p=0,p\neq n}^N\frac{1}{n-p}+\frac{1}{n+p} = \frac{1}{2n}\{\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{n-p}+\sum_{p=n+1}^N\frac{1}{n-p}+\sum_{p=0}^N\frac{1}{p+n}-\frac{1}{2n}\}$

$= \frac{1}{2n}\{\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{N-n}\frac{1}{k}+\sum_{k=n}^{n+N}\frac{1}{k}-\frac{1}{2n}\}$

$= \frac{1}{2n}\{-\sum_{k=n+1}^{N-n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}+\sum_{k=n+1}^{N-n}\frac{1}{k}+\sum_{k=N-n+1}^{n+N}\frac{1}{k}-\frac{1}{2n}\} = \frac{1}{2n}\{\frac{1}{2n}+\sum_{k=N-n+1}^{n+N}\frac{1}{k}\}$

$= \frac{1}{4n^2}+R_N$

avec :

$R_N \leq \frac{1}{2n}\sum_{k=N-n+1}^{n+N}\frac{1}{N-n+1} < \frac{2n}{N-n+1}$ et $\lim_{N\to\infty} R_N = 0$.

Ainsi $\sum_{p=0,p\neq n}^\infty\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{4n^2}$.

Si $n=0$, $\sum_{p=0,p\neq 0}^\infty\frac{1}{0^2-p^2} = -\sum_{p=1}^\infty\frac{1}{p^2} = -\frac{\pi^2}{6}$.

Alors :

$\sum_{n=0}^\infty\sum_{p=0}^\infty\frac{1}{n^2-p^2} = \sum_{p=0,p\neq 0}^\infty\frac{1}{0^2-p^2}+\sum_{n\geq 1}^\infty\sum_{p=0,p\neq n}^\infty\frac{1}{n^2-p^2}$

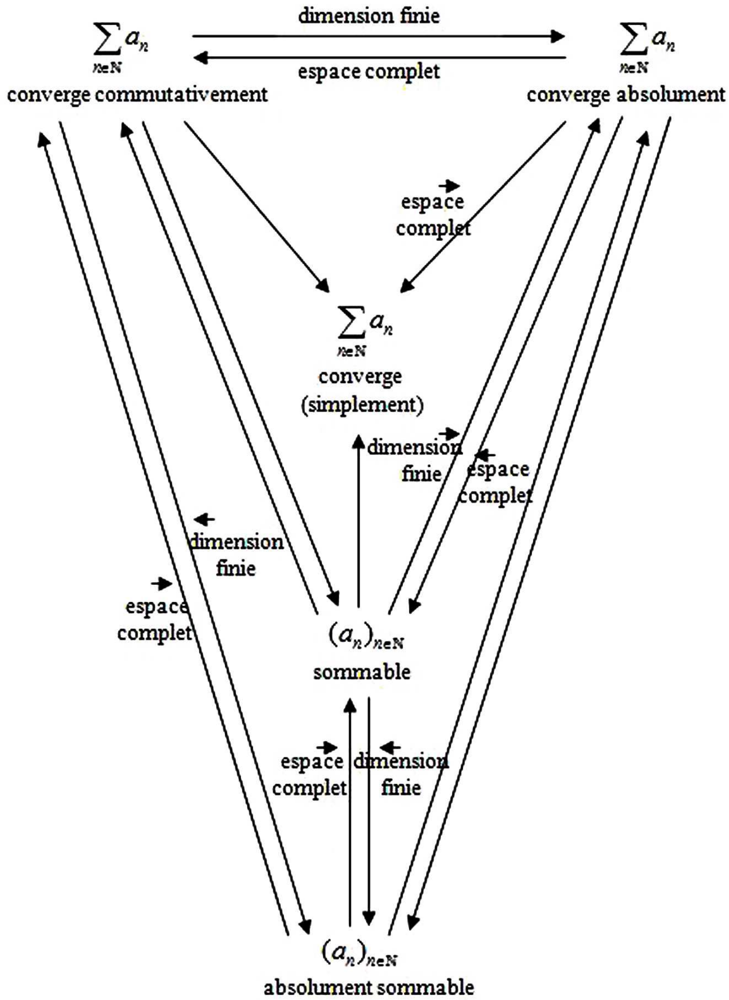
$= -\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n\geq 1}^\infty\frac{1}{4n^2} = -\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{8}$.

Donc :

$\sum_{n=0}^\infty\sum_{p=0}^\infty\frac{1}{n^2-p^2} = -\frac{\pi^2}{8}$ et $\sum_{p=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{\pi^2}{8}$

ce qui prouve une fois de plus que la famille $(\frac{1}{n^2-p^2})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2\backslash\Delta}$ n'est pas sommable.

***



Résumé des correspondances séries / familles sommables

Bibliographie

Il ne s'agit ici que des ouvrages consultés pour écrire ce papier, les premiers cités étant ceux qui m'ont le plus inspiré !

1. Gustave CHOQUET - "Cours d'analyse" - tome 2 : Topologie
   Masson (1969)
2. Bernard GOSTIAUX - "Cours de mathématiques spéciales" - tome 3 : Analyse fonctionnelle et calcul différentiel
   Presses Universitaires de France (1993)
3. Raymond COUTY & Jacques EZRA - "Analyse"
   Armand Colin ; collection U (1965)
4. E. RAMIS, C. DESCHAMPS & J. ODOUX - "Cours de mathématiques spéciales" - tome 4
   Masson (1977)
5. Jean DIEUDONNE - "Eléments d'analyse" - tome 1
   Gauthier-Villard (1969)
6. J.M. ARNAUDIES & H. FRAYSSE - "Cours de mathématiques" - tome 2 : Analyse
   Dunod (1988)